L3 SM	**Université de Tours**	**Année 2013-2014**
	Mécanique quantique	
P	**13/05/2014**	**durée de l'examen: 2h**

1. On sait que l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron (de masse $m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$kg et de charge $-e = -1.6{\cdot}10^{-19}$C) en interaction électromagnétique avec un proton (de masse $m_p \approx 1836 m_e$ et de charge $+e$).

   - En s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle, trouver une énergie caractéristique de l'atome à partir de $\hbar$, $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ et m_e. Calculer sa valeur numérique. Pourquoi, dans une première approximation, la masse du proton n'interviendra pas dans l'expression précédente?
   - Même question pour une vitesse caractéristique. Commenter. En déduire un ordre de grandeur de l'énergie cinétique de l'électron.
   - En utilisant les résultats précédents, estimer le rayon de l'orbite de l'électron.

   Rappels: $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$J·s, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$F/m.

2. On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique avec une lumière monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 546$nm (raie verte du mercure). Cet éclairement a pour effet l'apparition d'un courant électrique dans la cellule. Einstein a établi que l'éclairement doit être constitué de photons d'énergie fixée, et que c'est cette énergie qui permet d'arracher chaque électron de son atome et de lui fournir une impulsion.

   - Pour une photocathode en potassium, dont l'énergie d'ionisation est 2.3eV, calculer la longueur d'onde du seuil photoélectrique et l'énergie cinétique maximale des électrons que peut extraire un tel rayonnement de la cathode. En déduire la vitesse maximale des électrons arrachés.

3. Nous allons considérer dans cet exercice un électron de masse m localisé sur une impureté dans un matériau bidimensionnel. L'impureté est modélisée par le potentiel

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < a, |y| < a, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

   - Ecrire l'équation de Schroedinger vérifiée par la fonction d'onde de l'électron dans le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < a, |y| < a\}$, ainsi que les conditions au bord de D qu'elle vérifie.
   - Montrer (sans résoudre l'équation de Schroedinger explicitement mais en l'utilisant) que les niveaux d'énergie vérifient $E > 0$.
   - En utilisant la séparation des variables, résoudre l'équation de Schroedinger et trouver les niveaux d'énergie de l'électron ainsi que ses états propres.
   - Calculez la multiplicité du niveau fondamental de l'énergie et du quatrième niveau excité. Quelles quantités conservées sont à l'origine de cette dégénérescence des niveaux?
   - Enumérez les symétries discrètes du potentiel et les transformations correspondantes de la fonction d'onde. Commutent-t-elles avec l'Hamiltonien? Pourquoi?
   - Discutez les implications des symétries sur les fonctions d'ondes des états propres de l'électron. Vérifiez explicitement ces implications pour le niveau fondamental de l'énergie et le premier état excité.

4. La théorie la plus simple du ferromagnétisme suppose les électrons localisés sur des sites atomiques. En réalité, pour le fer et d'autres éléments de transition comme le cobalt et le nickel, les électrons sont "itinérants". Même pour deux électrons libres, l'interaction dépendant de l'orientation relative de leurs spins est à l'origine des propriétés ferromagnétiques. Cette interaction (dite d'échange) est souvent écrite sous la forme suivante, proposée par Heisenberg:

$$H_{\text{éch.}} = -\mathcal{J}\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)}.$$

Ici $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}$ notent les opérateurs de spin $\frac{1}{2}$ associés à chaque électron, et $\mathcal{J}$ est un coefficient positif dans le ferromagnétisme.

- Ecrire explicitement $H_{\text{éch.}}$, $\mathbf{s}_x^{(1)}$ et $\mathbf{s}_z^{(2)}$ sous forme de matrices.
  Indication: ces matrices seront de taille 4×4.
- Calculer les niveaux d'énergie de $H_{\text{éch.}}$ et leurs multiplicités.
- Expliquez la dégénérescence des niveaux en utilisant les symétries — c'est-à-dire, en ayant trouvé des opérateurs qui commutent avec $H_{\text{éch.}}$.

Rappels: Matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$